Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

УТВЕРЖДАЮ

Проректор
_____________С.Ю. Рощин

Одобрено на заседании Академического совета
Аспирантской школы по математике
Протокол №6 от 30.03.2017

Согласовано
Академический директор Аспирантской школы
по математике
____________/ А.Г. Горинов/

**Программа вступительного испытания по специальности по направлению «01.06.01 – Математика и механика»**

для поступающих на программы подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре

**Профиль 01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»**

**Профиль 01.01.03 «Математическая физика»**

**Профиль 01.01.04 «Геометрия и топология»**

**Профиль 01.01.05 «Теория вероятностей и математическая статистика»**

**Профиль 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»**

**Профиль 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела»**

Москва 2017

## 1. Область применения и нормативные ссылки

Программа вступительного испытания сформирована на основе федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования по программам специалитета или магистратуры.

## 2. Структура вступительного испытания

**Форма проведения:** вступительные испытания по профилям 01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление», 01.01.03 «Математическая физика», 01.01.04 «Геометрия и топология», 01.01.05 «Теория вероятностей и математическая статистика», 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел» состоят из двух частей: оценки индивидуальных достижений (конкурс портфолио) и собеседования.

### 2.1. Оценка индивидуальных достижений. Структура портфолио

Для участия в конкурсе индивидуальных достижений (портфолио) абитуриент может предоставить следующие документы на русском или английском языке:

1. Резюме (CV), включающее список публикаций, сведения об участии в конференциях, школах, исследовательских проектах, научных грантах, опыте работы, знании языков и программного обеспечения и т.д.
2. Копия документа об образовании с перечнем пройденных дисциплин и оценок по этим дисциплинам. Если абитуриент еще не получил диплом магистра, необходимо приложить копию полного списка уже пройденных дисциплин с оценками.
3. Научные публикации, препринты, выпускные, курсовые и другие письменные работы.
4. Информация об участии в российских и международных конференциях (с докладом) с указанием названия и места проведения конференции и темы доклада.
5. Как минимум два рекомендательных письма.
6. Документы, подтверждающие другие достижения, например, победы в студенческих олимпиадах, конкурсах студенческих работ, получение индивидуальных академических стипендий и грантов на обучение, если таковые существуют.

### 2.2. Критерии оценки портфолио

В итоговой сумме баллов учитывается максимальная оценка из полученных за отдельные категории индивидуальных достижений: письменные работы, CV, рекомендации.

| **Критерий оценки** | **Количество баллов** |
|---|---|
| **Письменные работы** | **Максимум - 50 баллов** |
| Тексты реферативного характера | от 0 до 10 баллов |

| | |
|---|---|
| Реферативные тексты с отдельными оригинальными разультатами | от 11 до 20 баллов |
| Публикации в журналах из списка ВАК или препринты на английском языке в репозитории arxiv.org | от 21 до 30 баллов |
| Публикации, индексируемые базой Math Reviews/MathSciNet | от 31 до 40 баллов |
| Публикации Q1-Q2 по WoS или Scopus | от 41 до 50 баллов |
| По решению приемной комиссии за препринты и другие тексты может выставляться оценка, аналогичная оценкам за сопоставимые статьи. | |
| **CV** | **Максимум - 50 баллов** |
| Доклады на студенческих конференциях | От 0 до 5 баллов |
| Доклады на региональных конференциях | От 0 до 10 баллов |
| Доклады на международных конференциях | От 0 до 20 баллов |
| Участие в студенческих или школьных олимпиадах | От 0 до 10 баллов |
| Победы в студенческих или школьных олимпиадах | От 0 до 25 баллов |
| Участие в исследовательских проектах | От 0 до 10 баллов |
| Работа учебным ассистентом | От 0 до 5 баллов |
| Продвинутые математические курсы (уровня магистратуры и выше) | От 0 до до 5 баллов за курс (начисляемые баллы зависят как от полученной за курс оценки, так и от положения университета в предметном рейтинге по математике) |
| Опыт работы с LaTeX | От 0 до 5 баллов |
| Опыт работы с системами компьютерной алгебры | От 0 до 10 баллов |
| Знание языков программирования (C++, Python, ...) | От 0 до 7 баллов |
| Оценка за CV равна минимуму суммы баллов за отдельные пункты и 50. | |
| **Рекомендации (как минимум 2)** | **Максимум – 50 баллов** |
| Рекомендация содержит описание научных результатов абитуриента | До 10 баллов |
| Рекомендатель имеет постоянную позицию в университете с высоким предметным рейтингом по математике | До 5 баллов для топ-200, до 10 баллов для топ-100, до 20 баллов для топ-50. |

| | |
|---|---|
| Рекомендатель считает абитуриента лучшим в определенной группе | До 10 баллов |
| Рекомендатель высоко оценивает мотивированность абитуриента | До 5 баллов |
| Рекомендатель высоко оценивает коммуникабельность, трудоспособность и другие качества абитуриента | До 5 баллов |
| Рекомендатель согласен быть научным руководителем абитуриента, и рекомендация содержит описание уже имеющихся наработок абитуриента по теме предполагаемой диссертации | До 35 баллов |
| Оценка за рекомендации равна минимуму суммы баллов за отдельные пункты и 50. | |

**Минимальное количество баллов, необходимых для участия в конкурсе по итогам оценки индивидуальных достижений – 15 баллов.**

### 2.3. Структура и процедура проведения собеседования

Собеседование состоит из двух частей.

В первой части абитуриент рассказывает о себе, о мотивах, которыми он руководствуется, выбирая математику как направление своего обучения и дальнейшей профессиональной деятельности, а также о направлении своих исследований и предполагаемой теме диссертации. На первую часть собеседования отводится 15 минут.

Во второй части оценивается теоретическая подготовленность абитуриента. Абитуриент получает два вопроса из теоретической части программы собеседования. Ему предоставляется 40 минут на подготовку и 10-15 минут на ответ. По решению приемной комиссии один или оба теоретических вопроса могут быть заменены задачами по материалу теоретической части.

Программы теоретической части собеседования для всех профилей содержатся в разделе 3 настоящего документа.

Собеседование проводится на русском или английском языке (по желанию абитуриента). По предварительному согласованию с абитуриентом собеседование может проводиться дистанционно с использованием информационных технологий.

### 2.4. Критерии оценки собеседования

Первая часть собеседования комиссии с абитуриентом оценивается исходя из 20 баллов. Оценивается умение абитуриента проводить самостоятельные исследования, знание методов, имеющийся опыт исследовательской деятельности.

**Примерные вопросы:**

- Какие области математики Вас интересуют?
- Есть ли у Вас научные результаты? Если да, то опишите некоторые из них.
- Над какими задачами Вы планируете работать в случае приема в аспирантуру? Есть ли у Вас уже какие-то продвижения в решении этих задач? Если да, то какие?

Во второй части собеседования комиссия оценивает уровень математической подготовки абитуриентов. Каждый вопрос оценивается по 15-балльной шкале.

**Критерии оценивания**

| | **Баллы** |
|---|---|
| Ответ полный, логичный, конкретный, без замечаний, продемонстрированы знания материала программы теоретической части. | 12-15 |
| Ответ логичный, конкретный, присутствуют незначительные пробелы в знания материала программы теоретической части. | 8-11 |
| Ответ неполный, отсутствует логичность повествования или допущены существенные логические ошибки. | 1-7 |
| Ответ на поставленный вопрос не дан. | 0 |

**Для участия в конкурсе по итогам собеседования поступающим необходимо набрать не менее 10 баллов за вторую часть собеседования.**

В случае набора абитуриентами равного количества баллов (полупроходного балла), преимущества получается абитуриент, соответствующий перечисленным ниже критериями. Критерии представлены в порядке убывания значимости.

1. Более высокая оценка за письменные работы.
2. Более высокая оценка за рекомендации.
3. Более высокая оценка за вторую часть собеседования.
4. Более высокая оценка за CV.

## 3. Содержание теоретической части собеседования

### 3.1. Содержание теоретической части (программы) собеседования по профилю 01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Поступающие в аспирантуру должны продемонстрировать знание следующих тем:

(1) Элементы комбинаторики (сочетания, перестановки) и теории вероятностей (независимость, условные вероятности).

(2) Теория групп: группы, подгруппы, смежные классы, гомоморфизмы, факторгруппы, строение конечно порожденных абелевых групп, теоремы Силова. Необходимо также знакомство с конкретными примерами групп, включая симметрические, знакопеременные, группы симметрии, матричные группы (полная линейная, специальная линейная), группы вычетов.

(3) Теория колец: кольца, идеалы, факторкольца, прямое произведение колец, китайская теорема об остатках, евклидовы кольца, факториальность, обратимые, простые и неприводимые элементы, простые и максимальные идеалы. Знакомство с конкретными кольцами должно включать комплексные числа, гауссовы целые числа, кольца вычетов, кольца многочленов и степенных рядов, кольца матриц.

(4) Линейная алгебра: векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, двойственность, системы линейных уравнений, жорданова нормальная форма, характеристический и минимальный многочлены, квадратичные формы, положительная определенность.

(5) Теория полей: поля, характеристика, структура конечных полей, конечные и алгебраические расширения, основная теорема теории Галуа.

(6) Пределы последовательностей и пределы функций, сходимость рядов. Непрерывные функции. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Равномерная непрерывность, равномерная сходимость.

(7) Общая топология: открытые и замкнутые подмножества в R^n. Компактность, связность, внутренность и замыкание, всюду плотные и нигде не плотные множества. Непрерывные отображения. Топологические пространства. Хаусдорфовы и метрические пространства. Полнота и пополнение. Теорема Бэра. Компактность. Связность. Нормальность.

(8) Элементы гомотопической топологии: гомотопные отображения, накрытия, фундаментальная группа, локально тривиальные расслоения.

(9) Дифференциальное исчисление: производные и дифференциалы отображений из R^mв R^n, теорема о производной сложной функции, ряд Тейлора, способы нахождения экстремумов, множители Лагранжа.

(10) Интегральное исчисление: мера и интеграл Лебега, предельный переход под знаком интеграла Лебега, теорема Фубини. Вычисление длин кривых и площадей поверхностей при помощи интегралов.

(11) Геометрия: аффинные и проективные пространства, аффинные и проективные отображения, кривые второго порядка (коники), поверхности второго порядка (квадрики), дробно-линейные отображения.

(12) Комплексный анализ: комплексная производная, голоморфные функции, теоремы Коши и Морера, интегральная формула Коши, теорема о вычетах, принцип сохранения области, принцип максимума модуля, лемма Шварца, теорема Римана о конформном отображении, принцип соответствия границ, принцип симметрии.

(13) Дифференциальные уравнения: теорема существования и единственности, решение уравнений методом разделения переменных, линейные уравнения первого и второго порядков, однородные уравнения, теорема Фробениуса.

Литература

В.И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984 (и другие издания).

В.И. Арнольд, Математические методы классической механики. Изд. 3-е, перераб. и доп.-М.: Наука, 1989 (и другие издания).

В.А. Васильев, Введение в топологию, М: Фазис 1997

Э.Б. Винберг. Курс алгебры. М: Факториал 1999

О.Я. Виро и др. Элементарная топология. М.:МЦНМО, 2010

И.М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, М: Наука 1971

А.Л. Городенцев, Вышкинская алгебра, модуль 1. записки лекций

http://vyshka.math.ru/pspdf/f08/algebra-l/ml_total.pdf

В.А. Зорич, Математический анализ. М: МЦНМО 2007

А.Н. Колмогоров. С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, М: Наука 1976

В.В. Прасолов. В.М. Тихомиров, Геометрия. М: МЦНМО 1997

Б.В. Шабат, Введение в комплексный анализ. Лань 2004

**3.2. Содержание теоретической части (программы) собеседования по профилю 01.01.03 «Математическая физика»**

Поступающие в аспирантуру должны продемонстрировать знание следующих тем.

1. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения линейных уравнений и систем произвольного порядка с постоянными коэффициентами. Автономные системы дифференциальных уравнений.
2. Ряд и преобразование Фурье и их основные свойства. Применение для решения дифференциальных уравнений.
3. Линейные операторы и их матрицы в конечномерном вещественном и комплексном пространстве. Линейные операторы в гильбертовом пространстве. Спектральное представление линейного оператора.
4. Интегральные уравнения Фредгольма. Метод последовательных приближений. Теоремы Фредгольма.
5. Понятие о характеристиках уравнений в частных производных. Решение нелинейных дифференциальных уравнений 1-ого порядка методом характеристик.
6. Обобщенные функции и их свойства. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Построение фундаментального решения линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. Функции Грина.
7. Уравнения гиперболического, параболического и эллиптического типа. Постановка основных краевых и начальных задач и их методы решения.
8. Основные свойства гармонических функций (формула Грина, теорема о среднем, принцип максимума, теорема о внутренней устранимой особенности).
9. Разложение голоморфных функций в ряды Тейлора и Лорана. Классификация особых точек. Теорема Коши о вычетах. Целые функции. Теорема Лиувилля.
10. Аналитическое продолжение. Римановы поверхности.
11. Методы Лапласа и стационарной фазы для вычисления асимптотик интегралов.
12. Группы и алгебры Ли. Основные типы алгебр Ли. Линейные представления групп и их характеры. Лемма Шура.
13. Дифференциальные формы и внешнее дифференцирование. Интегрирование дифференциальных форм. Теорема Стокса.
14. Римановы многообразия и метрики. Геодезические. Связности, их тензоры кривизны и кручения. Параллельный перенос.
15. Случайные величины и их математические ожидания. Дисперсия. Нормальное распределение и распределение Пуассона. Центральная предельная теорема.
16. Корреляционные функции. Марковские случайные процессы. Гауссовские процессы и процесс Пуассона. Броуновское движение.

17. Уравнения движения. Принцип наименьшего действия. Функция Лагранжа. Теорема Нетер и законы сохранения.
18. Одномерное движение. Движение в центральном поле. Свободные и вынужденные колебания. Колебания при наличии трения.
19. Движение твердого тела. Угловая скорость, моменты инерции и количества движения. Уравнения Эйлера.
20. Уравнения Гамильтона. Скобки Пуассона. Теорема Лиувилля. Уравнение Гамильтона-Якоби.
21. Принцип относительности. Преобразования Лоренца. Релятивистская механика.
22. Уравнения электромагнитного поля. Действие электромагнитного поля. Тензор энергии-импульса. Заряд в электромагнитном поле. Электромагнитные волны.
23. Запаздывающие потенциалы и потенциалы Льенара-Вихерта. Излучение электромагнитных волн.
24. Уравнения движения идеальной жидкости. Уравнения движения вязкой жидкости. Система уравнений Навье-Стокса.
25. Основные положения квантовой механики. Операторы энергии и импульса. Гамильтониан. Уравнение Гейзенберга. Соотношение неопределенности.
26. Уравнение Шредингера. Потенциальная яма. Прохождение через барьер. Движение в центральном поле. Атом водорода. Квазиклассическое приближение.
27. Уравнение Дирака. Спин. Тождественность частиц и принцип неразличимости. Связь спина со статистикой. Бозоны и фермионы.
28. Уравнение Шредингера в электрическом и магнитном полях. Плотность потока.
29. Квантовая теория рассеяния. Матрица рассеяния.
30. Основные принципы статистики. Статистическое распределение и статистическая независимость. Закон возрастания энтропии.
31. Термодинамические величины: температура, давление. Адиабатический процесс.
32. Распределение Гиббса. Свободная энергия. Термодинамические соотношения. Флуктуации.
33. Термодинамика идеальных газов. Распределение Больцмана. Свободная энергия и уравнение состояния. Распределения Бозе и Ферми. Фазовые переходы второго рода.

Рекомендуемая литература:

1. М. Рид, Б. Саймон, Современные методы математической физики, М. Мир, 1982.
2. Л.С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Физматгиз, 1961.
3. И.Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений,. М. Изд-во Моск. ун-та, 1984.

4. И.Г. Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными. М., Физматгиз, 1961.

5. Арнольд В.И., Лекции по уравнениям с частными производными, Независимый ун-т, М., 1995.

6. В.С. Владимиров, Уравнения математической физики, М. Наука, 2003.

7. В.С. Владимиров, В.В. Жаринов, Уравнения математической физики, ФИЗМАТЛИТ, 2003.

8. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н., Сборник задач по математической физике, Наука, М., 1972.

9. Комеч А.И., Практическое решение уравнений математической физики, МГУ, 1993.

10. Белов В.В., Воробьев Е.М., Сборник задач по дополнительным главам математической физики, «Высшая школа», М., 1978.

11. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.

12. Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики. М., Гостехиздат, 1951.

13. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. Современная геометрия. М., Наука, 1979.

14. А.И. Кострикин, Ю.И. Манин. Линейная алгебра и геометрия. М., МГУ, 1980.

15. Л.С. Понтрягин. Непрерывные группы. М., Наука, 1973.

16. А.А. Кириллов. Элементы теории представлений. М., Наука, 1972.

17. А.Н. Ширяев. Вероятность. М., Наука, 1980.

18. Б.В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. М., Наука, 1969.

19. В.И. Арнольд. Математические методы классической механики. М., Наука. 1974.

20. Э. Уиттекер. Аналитическая динамика. М., УРСС, 1999.

21. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Курс теоретической физики. М., Наука, 1973-1986.

22. К. Хуанг. Статистическая механика. М., Мир, 1966

**3.3. Содержание теоретической части (программы) собеседования по профилю 01.01.04 «Геометрия и топология»**

Поступающие в аспирантуру должны продемонстрировать знание следующих тем:

(1) Элементы комбинаторики (сочетания, перестановки) и теории вероятностей (независимость, условные вероятности).

(2) Теория групп: группы, подгруппы, смежные классы, гомоморфизмы, факторгруппы, строение конечно порожденных абелевых групп, теоремы Силова. Необходимо также знакомство с конкретными примерами групп, включая симметрические, знакопеременные, группы симметрии, матричные группы (полная линейная, специальная линейная), группы вычетов.

(3) Теория колец: кольца, идеалы, факторкольца, прямое произведение колец, китайская теорема об остатках, евклидовы кольца, факториальность, обратимые, простые и неприводимые элементы, простые и максимальные идеалы. Знакомство с конкретными кольцами должно включать комплексные числа, гауссовы целые числа, кольца вычетов, кольца многочленов и степенных рядов, кольца матриц.

(4) Линейная алгебра: векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, двойственность, системы линейных уравнений, жорданова нормальная форма, характеристический и минимальный многочлены, квадратичные формы, положительная определенность.

(5) Теория полей: поля, характеристика, структура конечных полей, конечные и алгебраические расширения, основная теорема теории Галуа.

(6) Пределы последовательностей и пределы функций, сходимость рядов. Непрерывные функции. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Равномерная непрерывность, равномерная сходимость.

(7) Общая топология: открытые и замкнутые подмножества в R^n. Компактность, связность, внутренность и замыкание, всюду плотные и нигде не плотные множества. Непрерывные отображения. Топологические пространства. Хаусдорфовы и метрические пространства. Полнота и пополнение. Теорема Бэра. Компактность. Связность. Нормальность.

(8) Элементы гомотопической топологии: гомотопные отображения, накрытия, фундаментальная группа, локально тривиальные расслоения.

(9) Дифференциальное исчисление: производные и дифференциалы отображений из R^mв R^n, теорема о производной сложной функции, ряд Тейлора, способы нахождения экстремумов, множители Лагранжа.

(10) Интегральное исчисление: мера и интеграл Лебега, предельный переход под знаком интеграла Лебега, теорема Фубини. Вычисление длин кривых и площадей поверхностей при помощи интегралов.

(11) Геометрия: аффинные и проективные пространства, аффинные и проективные отображения, кривые второго порядка (коники), поверхности второго порядка (квадрики), дробно-линейные отображения.

(12) Комплексный анализ: комплексная производная, голоморфные функции, теоремы Коши и Морера, интегральная формула Коши, теорема о вычетах, принцип сохранения области, принцип максимума модуля, лемма Шварца, теорема Римана о конформном отображении, принцип соответствия границ, принцип симметрии.

(13) Дифференциальные уравнения: теорема существования и единственности, решение уравнений методом разделения переменных, линейные уравнения первого и второго порядков, однородные уравнения, теорема Фробениуса.

Литература.

В.И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984 (и другие издания).

В.И. Арнольд, Математические методы классической механики. Изд. 3-е, перераб. и доп.-М.: Наука, 1989 (и другие издания).

В.А. Васильев, Введение в топологию, М: Фазис 1997

Э.Б. Винберг. Курс алгебры. М: Факториал 1999

О.Я. Виро и др. Элементарная топология. М.:МЦНМО, 2010

И.М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, М: Наука 1971

А.Л. Городенцев, Вышкинская алгебра, модуль 1. записки лекций

http://vyshka.math.ru/pspdf/f08/algebra-l/ml_total.pdf

В.А. Зорич, Математический анализ. М: МЦНМО 2007

А.Н. Колмогоров. С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, М: Наука 1976

В.В. Прасолов. В.М. Тихомиров, Геометрия. М: МЦНМО 1997

Б.В. Шабат, Введение в комплексный анализ. Лань 2004

**3.4. Содержание теоретической части (программы) собеседования по профилю 01.01.05 «Теория вероятностей и математическая статистика»**

**Раздел 1. Теория вероятностей**

*1. Основные понятия теории вероятностей*

1.1. Случайное явление в объективной реальности. Случайный эксперимент. Математическое описание случайного эксперимента.

1.2. Пространство элементарных событий. Алгебра и $\sigma$ – алгебра событий. Операции над событиями и их свойства.

1.3. Аксиомы вероятности (система Колмогорова). Свойства вероятности.

*2. Основные вероятностные схемы*

Классическое определение вероятности. Дискретные вероятностные пространства. Геометрические вероятности. Непрерывные вероятностные пространства.

*3. Условные вероятности и независимость*

3.1. Понятие условной вероятности. Вероятность совместного осуществления событий (формула умножения вероятностей). Независимость системы событий.

3.2. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

*4. Последовательность независимых испытаний*

Вероятностное описание последовательности независимых испытаний (схема Бернулли). Дискретные вероятностные распределения, связанные с последовательностью независимых испытаний.

*5. Случайные величины и распределения вероятностей*

5.1. Понятие случайной величины (идея и формальное определение).

5.2. Функции распределения случайных величин и их свойства.

5.3. Дискретные и абсолютно непрерывные случайные величины и соответствующие вероятностные распределения. Общее описание. Основные виды дискретных и абсолютно непрерывных вероятностных распределений.

5.4. Совместные распределения системы случайных величин. Независимость случайных величин.

5.5. Распределения функций от случайных величин.

*6. Числовые характеристики случайных величин и соответствующих вероятностных распределений*

6.1. Определение математического ожидания случайной величины. Свойства математического ожидания.

6.2. Определение дисперсии случайной величины. Свойства дисперсии.

6.3. Моменты и центральные моменты высших порядков.

6.4. Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин.

6.5. Классические неравенства, связанные с моментами. Неравенство Коши – Буняковского. Неравенство Минковского. Неравенство Чебышева.

6.6. Условные математические ожидания и условные распределения вероятностей относительно отдельных событий. Условные математические ожидания относительно систем событий.

6.7. Многомерное нормальное (гауссовское) распределение и его моментные характеристики.

*7. Предельные теоремы в теории вероятностей*

7.1. Классические предельные теоремы в схеме независимых испытаний (локальная и интегральная).

7.2. Математический аппарат для доказательства предельных теорем. Производящие функции. Характеристические функции случайных величин и их основные свойства. Связь характеристических функций с моментами. Формула обращения и теорема единственности. Теорема непрерывности (необходимое и достаточное условие слабой сходимости в форме сходимости характеристических функций).

7.3. Закон больших чисел. Закон больших чисел в форме Хинчина. Теорема о достаточных условиях применимости закона больших чисел к последовательности независимых, произвольным образом распределенных случайных величин.

7.4. Усиленный закон больших чисел. Теорема Колмогорова о достаточных условиях применимости усиленного закона больших чисел к последовательности независимых, произвольным образом распределенных случайных величин.

7.5. Центральная предельная теорема теории вероятностей и ее различные формы. Центральная предельная теорема для сумм независимых, одинаково распределенных случайных величин (теорема Ляпунова). Центральная предельная теорема для сумм произвольных независимых случайных величин. Условие Линдеберга.

*8. Различные виды сходимости последовательностей случайных величин*

Сходимость по вероятности. Сходимость в среднем квадратическом, сходимость в среднем порядка $p$ , $0 < p < \infty$ . Сходимость с вероятностью, равной единице (сходимость почти наверное). Сходимость по распределению (слабая сходимость). Связи между различными видами сходимости.

**Раздел 2. Основы теории случайных процессов**

*9. Понятие случайного процесса*

9.1. Случайный процесс как семейство случайных величин, зависящих от временного параметра. Случайный процесс как функция двух аргументов. Траектории случайного процесса. Конечномерные распределения случайного процесса.

9.2. Теорема Колмогорова о существовании случайного процесса с заданной системой конечномерных распределений.

*10. Марковские процессы с дискретным временем и дискретным множеством состояний (цепи Маркова)*

10.1. Определение марковской цепи. Различные формы марковского свойства.

10.2. Вероятности перехода марковской цепи и их свойства. Уравнения Колмогорова – Чепмена. Представление произвольных совместных распределений через вероятности перехода.

10.3. Классификация состояний марковской цепи. Определения свойств существенности, возвратности, положительности и периодичности. Связи между свойствами существенности, возвратности и положительности для конечных и счетных марковских цепей.

10.4. Предельное, эргодическое и стационарное распределения марковской цепи. Теоремы о необходимых и достаточных условиях существования эргодического распределения для конечной и счетной марковских цепей.

*11. Марковские процессы с непрерывным временем и дискретным множеством состояний.*

11.1. Определение марковского процесса.

11.2. Вероятности перехода марковского процесса и их свойства. Представление произвольных совместных распределений через вероятности перехода.

11.3. Инфинитезимальные характеристики марковского процесса (интенсивности перехода и выхода из данного состояния). Соотношения между интенсивностями перехода и выхода.

11.4. Дифференциальные уравнения Колмогорова относительно переходных вероятностей (прямая и обратная системы).

11.5. Свойства траекторий марковского процесса. Распределения вероятностей, описывающие характер траекторий.

11.6. Процесс гибели и размножения. Основные свойства. Условия существования предельного (стационарного) распределения. Аналитическое представление для предельного распределения.

11.7. Пуассоновский процесс. Различные определения пуассоновского процесса. Вероятности состояний и вероятности перехода пуассоновского процесса. Свойства траекторий.

*12. Марковские процессы с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний*

12.1. Вероятностные характеристики марковского процесса. Вероятности перехода и их свойства. Плотности вероятностей перехода. Представление произвольных совместных распределений значений процесса через плотности вероятностей перехода.

12.2. Определение диффузионного процесса. Дифференциальные уравнения для диффузионного процесса: обратное уравнение Колмогорова и прямое уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка.

**Раздел 3. Математическая статистика**

*13. Основные понятия математической статистики*

Задачи математической статистики. Понятие выборки. Вариационный ряд выборки. Эмпирическая (выборочная) функция распределения. Свойства эмпирических функций распределения. Гистограмма. Выборочные моменты. Моменты выборочных среднего и дисперсии.

*14. Основы теории оценивания неизвестных параметров распределений*

14.1. Понятие точечной статистической оценки. Несмещенные оценки. Несмещенные оценки с минимальной дисперсией.

14.2. Неравенство Рао – Крамера. Эффективность оценки. Критерий Бхаттачария оптимальности оценки.

14.3. Оценки максимального правдоподобия. Определение. Уравнения правдоподобия. Общие свойства оценок максимального правдоподобия. Асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия (состоятельность, асимптотическая нормальность).

14.4. Интервальное (доверительное) оценивание. Построение доверительных интервалов с использованием распределения точечной оценки параметра.

*15. Статистическая проверка гипотез*

15.1. Основные понятия и общие принципы теории проверки гипотез.

15.2. Проверка гипотезы о виде распределения. Критерий согласия Колмогорова. Критерий согласия хи – квадрат К. Пирсона. Критерий хи – квадрат для сложной гипотезы. Критерий пустых ящиков.

15.3. Гипотеза и критерии однородности. Критерий однородности Смирнова. Критерий однородности хи – квадрат.

15.4. Гипотеза независимости. Критерий независимости хи – квадрат. Критерий Спирмена. Критерий Кендалла.

*16. Регрессионный анализ*

16.1. Модель линейной регрессии. Описание модели. Оценивание неизвестных параметров (коэффициентов регрессии) в модели линейной регрессии. Метод наименьших квадратов. Оптимальность оценки, полученной по методу наименьших квадратов.

16.2. Модель нормальной регрессии. Оценки максимального правдоподобия для неизвестных параметров нормальной регрессии. Совпадение оценок, полученных по методу наименьших квадратов, с оценками максимального правдоподобия.

16.3. Общая линейная гипотеза нормальной регрессии. $F$ – критерий для проверки линейной гипотезы.

**Раздел 4. Мартингалы в дискретном времени**

17.1. Вероятностное пространство с фильтрацией. Мартингалы, обобщённые мартингалы, мартингальные преобразования.

17.2. Марковские моменты. Теорема Дуба (о свободном выборе).

17.3. Мартингальные неравенства. Теоремы сходимости и их приложения.

17.4. Приложения: УЗБЧ, теорема Колмогорова о трёх рядах.

**Раздел 5. Стохастический анализ**

18.1. Винеровский процесс и его свойства.

18.2. Система Хаара. Конструкция винеровского процесса.

18.3. Свойства траекторий винеровского процесса: недифференцируемость и бесконечность вариации.

18.4. Конструкция винеровского интеграла для функций из L2([0,1]).

18.5. Кратные винеровские интегралы.

18.6. Квадратично-интегрируемые мартингалы. Неравенство Дуба.

18.7. Интеграл Ито. Непрерывность траекторий интегралов.

18.8. Непрерывные семимартингалы.Формула Ито.

18.9. Мартингальная характеризация винеровского процесса (теорема

18.10. Леви).

18.11. Линейное стохастическое уравнение, экспоненциальные мартингалы и условия равномерной интегрируемости.

18.12. Теорема Гирсанова.

18.13. Стохастические уравнения. Сильные и слабые решения. Условия существования сильного решения. Теорема о представлении функционалов заданных на траекториях виннеровского процесса.

**Основная литература**

1. Боровков А.А. Теория вероятностей, – М.: издательство Едиториал УРСС, 2003.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: издательство ЛКИ, 2007.
3. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику. – М.: издательство ЛКИ, 2010.
4. Чжун К.Л., АитСахлиа Ф. Элементарный курс теории вероятностей. Стохастические процессы и финансовая математика. – М.: издательство Бином. Лаборатория знаний, 2007.
5. Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: издательство Государственный университет – Высшая школа экономики, 2005.
6. Ширяев А.Н. Вероятность (в двух томах). – М.: издательство МЦНМО, 2007.
7. Dekking F.M., Kraaikamp G., Lopuhaa H.P., Meester L.E.. A Modern Introduction to Probability and Statistics. Cambridge University Press, 2005.
8. Suhov Y., Kelbert M.. Probability and Statistics by Exemple. Cambridge University Press, 2005.

**Дополнительнаялитература**

1. Боровков А.А. Математическая статистика. – М.: Издательство Физматлит, 2007.
2. Ватутин В.А., Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Чистяков В.П. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах. – М.: Издательство Дрофа, 2003.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: издательство Высшая школа, 2000.
4. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Чистяков А. В. Задачи с решениями по математической статистике. – М.: издательство Дрофа, 2007.
5. Теория вероятностей и математическая статистика: энциклопедия. Главный редактор Ю.В. Прохоров. – М.: издательство Большая Российская энциклопедия. 1999.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения (в двух томах). –М.: издательство Книжный дом «Либроком», 2010.
7. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: издательство Дрофа, 2007.
8. Renyi A. Probability Theory. – Amsterdam, North – Holland, 1970.
9. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.. Статистика случайных процессов. Наука. 1974.
10. Karatzas I., Shreve S. Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer. 1991.

**3.5. Содержание теоретической части (программы) собеседования по профилю 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел»**

Поступающие в аспирантуру должны продемонстрировать знание следующих тем:

(1) Элементы комбинаторики (сочетания, перестановки) и теории вероятностей (независимость, условные вероятности).

(2) Теория групп: группы, подгруппы, смежные классы, гомоморфизмы, факторгруппы, строение конечно порожденных абелевых групп, теоремы Силова. Необходимо также знакомство с конкретными примерами групп, включая симметрические, знакопеременные, группы симметрии, матричные группы (полная линейная, специальная линейная), группы вычетов.

(3) Теория колец: кольца, идеалы, факторкольца, прямое произведение колец, китайская теорема об остатках, евклидовы кольца, факториальность, обратимые, простые и неприводимые элементы, простые и максимальные идеалы. Знакомство с конкретными кольцами должно включать комплексные числа, гауссовы целые числа, кольца вычетов, кольца многочленов и степенных рядов, кольца матриц.

(4) Линейная алгебра: векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, двойственность, системы линейных уравнений, жорданова нормальная форма, характеристический и минимальный многочлены, квадратичные формы, положительная определенность.

(5) Теория полей: поля, характеристика, структура конечных полей, конечные и алгебраические расширения, основная теорема теории Галуа.

(6) Пределы последовательностей и пределы функций, сходимость рядов. Непрерывные функции. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Равномерная непрерывность, равномерная сходимость.

(7) Общая топология: открытые и замкнутые подмножества в R^n. Компактность, связность, внутренность и замыкание, всюду плотные и нигде не плотные множества. Непрерывные отображения. Топологические пространства. Хаусдорфовы и метрические пространства. Полнота и пополнение. Теорема Бэра. Компактность. Связность. Нормальность.

(8) Элементы гомотопической топологии: гомотопные отображения, накрытия, фундаментальная группа, локально тривиальные расслоения.

(9) Дифференциальное исчисление: производные и дифференциалы отображений из R^mв R^n, теорема о производной сложной функции, ряд Тейлора, способы нахождения экстремумов, множители Лагранжа.

(10) Интегральное исчисление: мера и интеграл Лебега, предельный переход под знаком интеграла Лебега, теорема Фубини. Вычисление длин кривых и площадей поверхностей при помощи интегралов.

(11) Геометрия: аффинные и проективные пространства, аффинные и проективные отображения, кривые второго порядка (коники), поверхности второго порядка (квадрики), дробно-линейные отображения.

(12) Комплексный анализ: комплексная производная, голоморфные функции, теоремы Коши и Морера, интегральная формула Коши, теорема о вычетах, принцип сохранения области, принцип максимума модуля, лемма Шварца, теорема Римана о конформном отображении, принцип соответствия границ, принцип симметрии.

(13) Дифференциальные уравнения: теорема существования и единственности, решение уравнений методом разделения переменных, линейные уравнения первого и второго порядков, однородные уравнения, теорема Фробениуса.

**Литература**

В.И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984 (и другие издания).

В.И. Арнольд, Математические методы классической механики. Изд. 3-е, перераб. и доп.-М.: Наука, 1989 (и другие издания).

В.А. Васильев, Введение в топологию, М: Фазис 1997

Э.Б. Винберг. Курс алгебры. М: Факториал 1999

О.Я. Виро и др. Элементарная топология. М.:МЦНМО, 2010

И.М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, М: Наука 1971

А.Л. Городенцев, Вышкинская алгебра, модуль 1. записки лекций

http://vyshka.math.ru/pspdf/f08/algebra-l/ml_total.pdf

В.А. Зорич, Математический анализ. М: МЦНМО 2007

А.Н. Колмогоров. С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, М: Наука 1976

В.В. Прасолов. В.М. Тихомиров, Геометрия. М: МЦНМО 1997

Б.В. Шабат, Введение в комплексный анализ. Лань 2004

**3.6. Содержание теоретической части (программы) собеседования по профилю 01.02.04 «Механика деформируемого твердого тела»**

**Раздел 1 Математическое моделирование физико-механических процессов**

1. Понятие тензора и основные алгебраические операции с тензорами
2. Лагранжевы (материальные) и Эйлеровы (пространственные) координаты, тензоры деформаций Грина и Альманси.
3. Теория малых деформаций Коши. Физический смысл компонентов тензора деформаций.
4. Определение компонент вектора перемещений через компоненты поля малых деформаций. Условия совместности деформаций.
5. Напряженное состояние в точке. Тензор напряжений.
6. Главные значения и главные направления тензора напряжений Девиатор напряжений.
7. Уравнение неразрывности в Эйлеровых и Лагранжевых координатах.
8. Уравнение движения сплошной среды.
9. Полная система уравнений сплошной среды. Начальные и граничные условия
10. Закон Гука. Тензор упругих постоянных.
11. Постановка задачи теории упругости в перемещениях.
12. Постановка задач теории упругости в напряжениях.
13. Потенциальная энергия упругой деформации. Единственность решения задач теории упругости.
14. Плоское напряженное состояние. Плоское деформированное состояние.
15. Основные уравнения термоупругости.
16. Вариационная постановка задачи Дирихле (уравнение Пуассона) на примере задачи о деформировании пластины.
17. Ползучесть и релаксация, интегральные операторы вязкоупругости.
18. Теория малых упруго-пластических деформаций.

ЛИТЕРАТУРА к разделу 1:

1. Е.Н.Чумаченко, С.Д.Арутюнов, А.И.Воложин и др. Создание научных основ и внедрение в клиническую практику компьютерного моделирования лечебных технологий и прогнозов реабилитации больных с челюстно-лицевыми дефектами и стоматологическими заболеваниями. Монография. М.: МГМСУ, 2010.
2. Чумаченко Е.Н., Смирнов О.М., Цепин М.А. Сверхпластичность: материалы, теория, технологии (в серии: "Синергетика: от прошлого к будущему") – М:, Изд. 2-е, Книжный дом ЛИБРОКОМ", 2009.

3. Черняк В.Г., Суетин П.Е. Механика сплошных сред. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2006.
4. Седов Л. И. Механика сплошной среды. В 2-х томах. Санкт-Петербург: Изд-во «Лань», 2004.
5. Селиванов В. В. Прикладная механика сплошных сред. В 3 томах. Том 2: Механика разрушения деформируемого тела. Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006.
6. Е.Н.Чумаченко, С.Д.Арутюнов, И.Ю.Лебеденко Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния зубных протезов. Учебное пособие.- М.: Молодая Гвардия, 2003, 272 с.
7. Л.И.Седов «Механика сплошной среды», т. 1 и 2, М., Наука, 1984.
8. А.А.Ильюшин «Механика сплошной среды», изд. МГУ, 1981.
9. Ю.Н.Работнов Механика деформируемого твердого тела - М.: Наука, 1984.

**Раздел 2**

**Применение ЭВМ к решению задач МДТТ**

1. Формулы Гаусса численного интегрирования.
2. Понятие сплайна, линейная интерполяция функций двух переменных на плоской области.
3. Решение нелинейных уравнений и систем: метод Ньютона и метод последовательных приближений.
4. Понятие обусловленности для решения систем линейных уравнений.
5. Метод квадратного корня для систем линейных уравнений.
6. Итерационные методы решения систем алгебраических уравнений
7. Численное решение интегральных уравнений.
8. Метод Ритца.
9. Формирование локального и глобального базисов в МКЭ.
10. Формирование матрицы жесткости в глобальной форме.
11. Вывод формулы рассылки локальных матриц в глобальную матрицу' жесткости.
12. Формирование глобальной матрицы жесткости через локальные.
13. Методы полуавтоматической генерации сетки конечных элементов.
14. Метод упругих решений.
15. Метод переменных параметров упругости.

**ЛИТЕРАТУРА к разделу 2:**

1. Е.Н.Чумаченко, И.В.Логашина Математическое моделирование и оптимизация процессов деформирования материалов при обработке давлением, М.: ЭКОМЕТ, 2008.-400с.
2. Присекин В.Л., Расторгуев Г.И. Основы метода конечных элементов в механике деформируемых тел. - Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2010
3. Бураго Н. Г. Вычислительная механика. М.: Изд-во МГТУ им Н. Э. Баумана, 2007.
4. Чумаченко Е.Н., Смирнов О.М., Цепин М.А. Сверхпластичность: материалы, теория, технологии. - М., КомКнига, 2005. – 320 с.
5. Подураев Ю.В., Мехатроника: основы, методы, применение: учебное пособие для студентов вузов. – М: Машиностроение, 2006.
6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Пер. с англ., М.: "Мир", 1975.
7. Yang Jusheng, Yang Nan, A brief review of FEM software technique, Advances in Engineering Software, Volume 17, Issue 3, 1993, Pages 195–200

**Раздел 3**

**Численно-аналитические методы в МДТТ**

1. Основные краевые задачи для оператора Лапласа.
2. Формулы Грина для оператора Лапласа.
3. Теоремы единственности решений основных краевых задач для оператора Лапласа.
4. Фундаментальное и сингулярное решение оператора Лапласа.
5. Гармонические потенциалы простого и двойного слоя и их свойства.
6. Гармонический объемный потенциал и его свойства.
7. Интегральные уравнения основных краевых задач теории гармонического потенциала.
8. Формулы Грина-Бетти для оператора Ламе.
9. Теоремы единственности решений основных краевых задач для оператора Ламе.
10. Фундаментальное решение оператора Ламе.
11. Сингулярные решения оператора Ламе.
12. Упругий потенциал простого слоя и его свойства.
13. Упругий потенциал двойного слоя и его свойства
14. Упругий объемный потенциал и его свойства
15. Интегральные уравнения основных краевых задач статической теории упругости.
16. Постановка задачи оптимального управления в случае фиксированной начальной и конечной точки траектории.
17. Постановка задачи оптимального управления в случае подвижной правой точки траектории и фиксированной левой.

18. Постановка задачи оптимального быстродействия.

**ЛИТЕРАТУРА к разделу 3:**


1. A.H.-D. Cheng, D.T. Cheng, Heritage and early history of the boundary element method, Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2005. – Vol. 29. – P. 268–302.
2. Mackerli, J. FEM and BEM in the context of information retrieval, Computers and Structures. – 2002. – № 80. – P. 1595-1604.
3. J.C. Lachat, J.O. Watson, Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics, Int. J. Numer. Mech. Eng. – 1976. – № 10. – P. 991-1005.
4. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Старовойтов Э.И., Теория упругости и пластичности: учебник, – М. ФИЗМАТЛИТ, 2011.
5. А.Н.Боголюбов, Н.Т.Левашова, И.Е.Могилевский, Ю.В.Мухартова, Н.Е.Шапкина. Фунция Гринв Оператора Лапласа. – М., Физический факультет МГУ, 2012.
6. Кондратьев Б.П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир, 2007
7. Горшков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. Волны в сплошных средах. М.: Физматлит, 2004.
8. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
9. Благодатских В.И.Введение в оптимальное управление. - М.: Высшая школа, 2001.
10. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М., Наука, 2-е издание, 1976.
11. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. - М., Мир, 1984.
12. Бреббиа К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. - М., Мир, 1982.
13. Верижский Ю.В. Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики, Киев, Вища школа, 1978.